

Programação de Horários de Exames através da Coloração de Grafos *Examination timetabling problem through graph coloring*

Vanessa Scheeren¹
Elizangela Dias Pereira²
Francieli Aparecida Vaz³

Resumo: Este trabalho apresenta uma proposta de solução para o Problema de Horários de Exames de cursos universitários. O propósito é desenvolver um cronograma de exames finais viável que aplique todos os exames no período de cinco dias, atendendo às condições impostas pelo problema. Esta abordagem justifica-se pelo fato de que a elaboração do calendário de exames de forma manual consiste em uma atividade exaustiva, que exige a dedicação de funcionários por um longo período de tempo e ainda assim, na maioria das vezes, o resultado final não atende as expectativas. Nesta proposta a técnica de solução fundamenta-se na Teoria dos Grafos, mais precisamente no método de Coloração de Grafos realizado por meio do algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado. Com este propósito, para desenvolver a solução para o Problema de Programação de Horários de Exames finais foram utilizados dados reais referentes aos componentes curriculares ofertados aos alunos do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé. Os resultados alcançados mostraram que o algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado, alicerçado na técnica de Coloração de Grafos conseguiu atender aos objetivos do problema. Com base neste trabalho foi possível desenvolver um Calendário de Exames Finais viável, dentro do prazo estabelecido, satisfazendo a todas as condições impostas.

Palavras-chave: Algoritmo de *Welsh-Powell*; Coloração de Grafos; Exames.

Abstract: *This paper presents a proposal for a solution to the Examination Timetabling Problem of university courses. The purpose is to develop a viable final exam schedule that will apply all the exams within five days, taking into account all the conditions imposed by problem. This approach is justified by the fact that the preparation of the examination timetabling manually consists of an exhaustive activity, which requires the dedication of many employees for a long period of time and in most cases, the final result is not meets expectations. In this proposal, the solution technique is based on Graph Theory, more precisely on the Graph Coloring method performed by the adapted Welsh-Powell algorithm. In order to develop the solution to the problem of examination timetabling, we used real data referring to the courses offered to the students of the Mathematics Program - Federal University of Pampa, campus Bagé. The results showed that the adapted Welsh-Powell algorithm based on the Graph Coloring technique was able to meet the objectives of the problem. Based on this work, it was possible to develop a viable final exam schedule, within the established period, satisfying all the conditions specified.*

¹ Graduada em Licenciatura em Matemática. Discente do Curso de Especialização em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação. Mestranda em Ensino, UNIPAMPA, Campus Bagé – Av. Maria Anunciação Godoy, 1650 - Bagé (RS) - Brasil

{vanessascheeren93@gmail.com}

² Graduada em Matemática pela Universidade Federal de Rio Grande. Mestrado em Modelagem Computacional pela Universidade Federal de Rio Grande. Doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina.

³ Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões. Mestrado e Doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

1 INTRODUÇÃO

O Problema de Programação de Horários de Exames universitários vem sendo pauta de muitas discussões no âmbito da matemática aplicada. Isso se deve, principalmente, ao fato de que na maioria das instituições de ensino a elaboração do calendário de exames é realizada semestralmente (MACHADO; BOERES, 2009; SANTOS; SOUZA, 2007). Essa tarefa, muitas vezes desenvolvida de forma manual, envolve muitos funcionários, coordenadores de curso e até professores que destinam um importante período de seu tempo funcional a este fim. E ainda assim, os resultados obtidos nem sempre condizem com o esperado.

Este artigo apresenta uma proposta de solução para o Problema de Programação de Horários de Exames de cursos universitários pautada em dados reais referentes aos componentes curriculares ofertados aos alunos do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA, campus Bagé - RS. O método de solução adotado fundamenta-se na Teoria dos Grafos, mais precisamente no conceito de Coloração de Grafos, que será desenvolvido por meio do algoritmo de Welsh-Powell (WELSH; POWELL, 1967) adaptado.

A Teoria dos Grafos desenvolveu-se impulsionada pelas aplicações a problemas de otimização organizacional, que compõem um conjunto de técnicas encontradas na Pesquisa Operacional. Esse ramo da Matemática Discreta é pouco explorado no Brasil em todos os níveis de ensino, embora sua aplicação possa ser estendida a diferentes campos do conhecimento. A Teoria dos Grafos proporciona ferramentas simples, acessíveis e poderosas para a construção de modelos e resolução de problemas relacionados com arranjos discretos, servindo como modelo matemático para qualquer sistema (BOAVENTURA NETTO, 2006).

Nessa perspectiva, o problema apresentado caracteriza-se como *Timetabling Problem* (Problema de Horários) que, quando aplicado ao contexto educacional, consiste em agendar uma série de encontros entre alunos, professores e instituições de ensino como, por exemplo, aulas, exames, cursos, entre outras atividades inerentes a este contexto, satisfazendo a um conjunto de restrições (WERRA, 1985; SCHAERF, 1999). Dentre as diferentes classificações existentes para o problema, a mais utilizada é a proposta por Schaefer (1999), que consiste em subdividir o problema em três classes: Problema de Programação de Horários em Escolas; Problema de Programação de Horários de Cursos e Problema de Programação de Horários de

Exames. Dentre as classificações apresentadas, esta abordagem está centrada no Problema de Programação de Horários de Exames (*Examination Timetabling Problem*) que consiste em agendar os exames finais satisfazendo uma série de restrições.

Para um melhor entendimento, o próximo capítulo contemplará diferentes abordagens do Problema de Exames presentes na literatura. No capítulo 3 será abordado o Problema de Programação de Exames por meio da descrição do problema proposto, do método de solução e os resultados alcançados. Por último, no capítulo 4 são expostas as considerações finais através de uma análise dos resultados obtidos a partir da técnica utilizada.

2 ALGUMAS ABORDAGENS DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DE HORÁRIOS DE EXAMES NA LITERATURA

A Programação de Horários de Exames em cursos universitários não é um problema novo, importantes autores e pesquisadores da área desenvolveram diversas técnicas de solução baseadas, principalmente, em métodos exatos, heurísticos e meta-heurísticos.

Dentre as inúmeras técnicas de solução presentes na literatura Woumans et al (2016) utilizaram uma abordagem de Geração de Colunas através de dois modelos de algoritmos para resolver o problema de horário de exames a partir de uma perspectiva mais centrada no aluno e buscando diminuir a realização de várias versões do mesmo exame. Para esse modelo foi necessária uma etapa de pós-processamento, utilizando uma abordagem heurística e uma abordagem de Programação Inteira Binária para construir o calendário de exames finais.

Para solucionar o problema de tabela/horário de Toronto, Machado e Boeres (2009) propuseram sua modelagem como um problema de Coloração de Grafos resolvendo-o por um algoritmo baseado na heurística de Busca Tabu para Coloração de Grafos adaptado com modificações para usar vizinhança em cadeia ao invés da vizinhança básica.

A heurística de Busca Tabu também foi utilizada por Gaspero e Schaerf (2001) que apresentaram uma família de algoritmos para a solução do problema de *Timetabling* de Exames, importando vários recursos da Coloração de Grafos. Os autores pretendiam elaborar um calendário de exames para cursos universitários com o intuito de evitar a sobreposição de exames que possuem alunos em comum e satisfazer a capacidade das salas.

Burke et al (2007) também recorreram a Coloração de Grafos aliando-a a heurística de Busca Tabu. Em seu artigo, os autores apresentaram uma abordagem genérica hiper-heurística

sobre um conjunto de heurísticas construtivas de Coloração de Grafos muito utilizadas no tempo limite. Dentro da estrutura hiper-heurística foi empregada uma abordagem de Busca Tabu para procurar permutações de heurísticas de grafos que são usadas para construir horários de exames e problema de horário de aulas.

Para a elaboração de um cronograma de exames, Duong e Lam (2004) apresentaram um método de solução que combina a Programação de Restrições e o Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*), essa abordagem consiste em duas fases: uma fase de programação de restrições para fornecer uma solução inicial; e uma fase de Recozimento Simulado para melhorar a qualidade da solução. O Recozimento Simulado aplica a vizinhança da cadeia Kempe e inclui um mecanismo que permite ao usuário definir um determinado período de tempo em que o algoritmo deve ser executado.

David (1998) também utilizou a técnica de Satisfação de Restrições. O autor desenvolveu uma solução para gerar o calendário de exames para *École des Mines de Nante*, com a condição de que o tempo de computação deveria ser inferior a um minuto através do método de Satisfação de Restrições em que, ao invés de aplicar o método usual de busca exaustiva, implementou um algoritmo incompleto usando técnicas locais de reparo.

Com o intuito de superar o problema de proximidade de exames não preenchidos, Côté, Wong e Sabourin (2005) apresentaram um Algoritmo Evolutivo Multiobjectivo Híbrido (MOEA), considerando que o cronograma precisa oferecer ao aluno o máximo de tempo livre entre os exames. Nessa hibridização foram utilizados os operadores locais de busca ao invés de operadores de recombinação. Um dos operadores de pesquisa foi projetado para reparar os horários inviáveis produzidos pelo procedimento de inicialização e o operador de mutação. O outro, implementou uma meta-heurística simplificada de Desvantagem de Vizinhança Variável, seu papel foi de melhorar o custo de proximidade.

Um poderoso algoritmo Genético Híbrido foi utilizado por Burke, Elliman e Weare (1995). Os autores combinaram uma representação direta do cromossomo com operadores heurísticos *crossover* para garantir que as restrições mais fundamentais nunca sejam violadas. Esses operadores de *crossover* híbridos foram utilizados para propagar o máximo de características desejáveis do cromossomo a fim de gerar boas soluções mesmo para problemas grandes e altamente restritos.

Mujuni e Mushi (2015) propuseram uma extensão para um trabalho de Selemani, Mujuni e Mushi (2013) que se baseia numa heurística híbrida composta por duas fases que combinam Coloração de Grafos e Recozimento Simulado na *Sokoine University of Agriculture* (SUA) na Tânzania. Os autores acrescentaram ao problema uma nova restrição que considera as lacunas entre os exames com o objetivo de desenvolver e implementar um algoritmo que produza uma distribuição de exames livre de colisões, em que os exames de grande porte são agendados o mais cedo possível e que cada exame realizado por um mesmo aluno seja distribuído com um maior intervalo de tempo, dentro dos limites de planejamento estabelecidos.

Através do estudo bibliográfico realizado a respeito do Problema de Programação de Horários de Exames foi possível reconhecer as mais variadas formas de abordagem do problema e os métodos de solução empregados. Esse estudo mostra que as técnicas utilizadas, assim como as restrições impostas, dependem necessariamente dos objetivos a serem alcançados e das especificidades de cada realidade, são esses fatores que determinam as estratégias mais eficientes para cada circunstância particular.

A seguir será apresentado o Problema de Horários de Exames com as particularidades que caracterizam o ambiente para o qual o cronograma foi elaborado, assim como as técnicas utilizadas para a solução do problema e a construção do calendário de exames.

3 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DE EXAMES

3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O presente artigo traz uma técnica de solução para o Problema de Programação de Horários de Exames diferente das demais identificadas na literatura. Grande parte das abordagens disponíveis na literatura busca um cronograma de exames num menor período, ou seja, tem como princípio minimizar o cronograma. Nesta abordagem, objetiva-se desenvolver um calendário de exames de acordo com prazos já estabelecidos inicialmente pela instituição de ensino.

Além disso, na elaboração dos cronogramas de horários de exames, geralmente, são considerados apenas os alunos que pretendem realizar exames finais, isto é, o calendário é desenvolvido no momento em que os discentes já estão a par de sua situação de dependência ou não de exames finais. Esse fato leva a uma diminuição de variáveis a serem consideradas

na elaboração do calendário. No entanto, neste caso a solução será desenvolvida com o intuito de que o calendário de exames seja disponibilizado a instituição de ensino no início do semestre letivo. Portanto, todos os alunos matriculados nos componentes curriculares são considerados para fins de elaboração do calendário, observando que todos estão propensos a realizar o exame final.

O modelo de solução abordado neste artigo será desenvolvido a partir de dados reais relacionados aos componentes curriculares ofertados aos alunos do curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé. Desse modo, foram considerados para este estudo 19 componentes curriculares que contabilizam um total de 221 alunos matriculados e 18 professores referentes ao primeiro semestre de 2017. Essas informações foram retiradas do sistema da universidade a partir do portal de Gestão Unificada de Recursos Institucionais (GURI) sob a forma de planilhas eletrônicas.

Nesse sentido, a fim de garantir a viabilidade do calendário de exames e satisfazer as condições impostas pelo contexto no qual o problema se insere, as seguintes restrições foram determinadas e devem ser satisfeitas:

1. Exames de componentes curriculares que possuem alunos matriculados em comum não podem ser agendados para o mesmo período;
2. Professores que ministram mais de um componente curricular não podem ter os respectivos exames alocados para o mesmo período;
3. Podem ser agendados no máximo dois exames por período;
4. Deve ser priorizado o agendamento para o mesmo período de exames referentes a componentes curriculares de mesma natureza;
5. O calendário deve ser distribuído no tempo de uma semana, cinco dias, considerando ainda que a cada dia correspondem dois períodos.

4 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Um grafo é um par $G=(V,E)$, onde V é um conjunto finito e E um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V . Os elementos de V são chamados vértices do grafo e os elementos de E são chamados de arestas do grafo.

O método utilizado para solucionar o problema fundamenta-se na Teoria dos Grafos, mais precisamente na Coloração de Mapas também conhecida como Coloração de Grafos. Segundo Carvalho (2011), com base nessa técnica tem-se que dado um grafo G não direcionado, formado por um conjunto de n vértices $V=v_1, \dots, v_n$ e um conjunto E

de arestas ligando vários pares distintos de vértices, o problema de coloração de grafos consiste em atribuir cores a cada vértice pertencente a V de modo que a mesma cor não possa ser atribuída a nenhum par de vértices com arestas em comum e o número de cores utilizadas para a coloração dos vértices deve ser o mínimo.

Nesse sentido, é necessária a construção de uma matriz de conflitos, também denominada de matriz de adjacência, desenvolvida através do tratamento dos dados extraídos do sistema da universidade. Essa matriz foi obtida por meio da comparação entre cada componente curricular em relação aos demais com o intuito de identificar os alunos matriculados em comum, esses alunos representaram os conflitos existentes entre os componentes.

A coloração do grafo G que fornece a solução para o Problema de Programação de Exames e, conseqüentemente, um calendário de exames viável para o Curso de Matemática – Licenciatura foi realizada de forma manual por intermédio do Algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado. As alterações realizadas no algoritmo de *Welsh-Powell* se fizeram necessárias para que todas as restrições determinadas para o calendário de exames fossem atendidas.

A Figura 1 a seguir, apresenta o algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado de acordo com as especificidades determinadas para o problema.

Figura 1 - Algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado

Algoritmo de <i>Welsh-Powell</i> adaptado
A entrada é um grafo G .
<u>Passo 1</u> Ordene os vértices de G em ordem decrescente de grau.
<u>Passo 2</u> Atribua a primeira cor, C_1 , ao primeiro vértice e, então, atribua C_1 ao vértice de mesma natureza ao vértice que foi atribuída a cor C_1 que não é adjacente a algum vértice que o antecedeu e ao qual foi atribuída a cor C_1 .
<u>Passo 2.1</u> Caso tenha mais de um vértice que pode receber a cor C_1 e este for de mesma natureza, atribuir C_1 ao vértice de maior grau dentre estes.
<u>Passo 2.2</u> Caso os vértices que podem receber a cor C_1 sejam de natureza distinta ao vértice que recebeu a cor C_1 , atribuir C_1 ao vértice de maior grau dentre estes.
Passo 3 Repita o <u>Passo 2</u> com a segunda cor C_2 e o vértice subsequente de maior grau não colorido, depois com a terceira cor C_3 , e assim por diante, até que todos os vértices estejam coloridos.
Passo 4 Saia.

Fonte: Adaptado de (LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M., 2004)

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A presente proposta discorre sobre a elaboração de um calendário de exames finais desenvolvidos a partir de dados reais referentes ao Curso de Matemática da UNIPAMPA, campus Bagé. Esse problema é conhecido na Teoria dos Grafos como Problema de Programação de Exames que consiste em agendar uma série de exames em um intervalo de tempo, determinado previamente ou não, satisfazendo uma série de restrições.

5.1 MODELAGEM DO PROBLEMA COMO UM GRAFO

Para a modelagem do problema como um grafo, aqui denominado de grafo G , e sua posterior solução como um problema de Coloração de Grafos, os componentes curriculares foram enumerados de 1 a 19 e representados como vértices do grafo. As arestas de G foram obtidas a partir de uma matriz de adjacência, ou matriz de conflitos, e representam os conflitos existentes entre cada componente curricular. A matriz de conflitos foi obtida através de um código computacional escrito em FORTRAN (FORMula TRANslation), apresentado de forma resumida na Figura 2.

Figura 2 - Algoritmo para construção da matriz de adjacência

Algoritmo para construção da matriz de adjacência

1. Ler as informações fornecidas pelo sistema e alocar os dados conforme:
 $CC(k)$ - componentes curriculares;
 $D(k, i)$ - discente i matriculado no componente $CC(k)$.
2. Contar os conflitos existentes entre os componentes:
Se $D(k, i) = D(j, i)$ então $Conflito(k, j) = 1$; $k, j = 1, \dots, 19$
Caso contrário, $Conflito(k, j) = 0$.
3. Construir a matriz de adjacência zero-um.

Fonte: Autores

O algoritmo realiza a leitura das planilhas eletrônicas com os dados de matrícula dos estudantes disponibilizadas pelo sistema da universidade e elabora como saída uma matriz especificando a existência de conflitos entre cada componente curricular, conforme Figura 3.

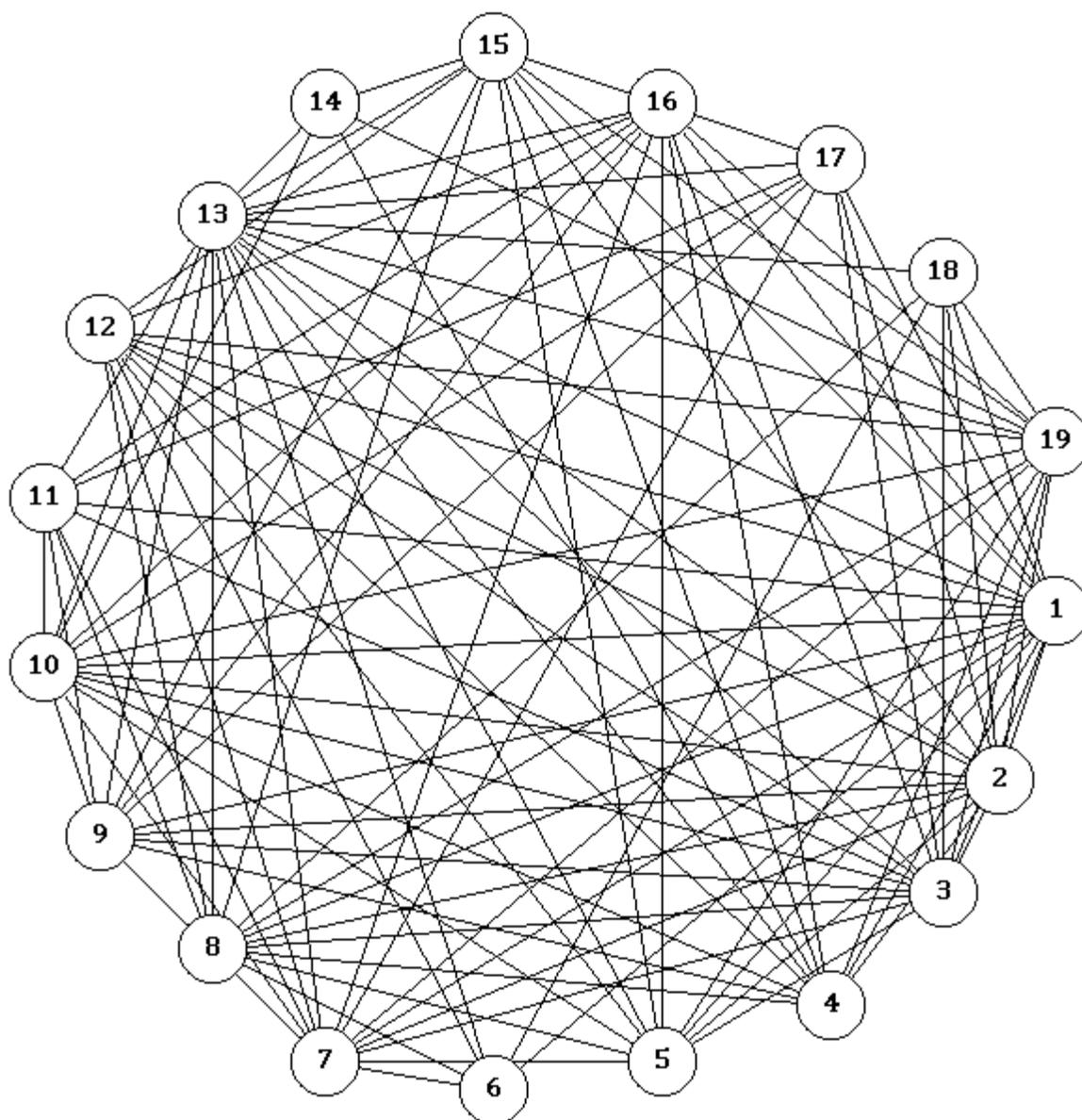
Figura 3 – Matriz de Conflitos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
2	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
4	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
5	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
6	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
9	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
10	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
11	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
15	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
16	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
17	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
18	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
19	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0

Fonte: Autores

A matriz de conflitos, descrita na Figura 3, é uma matriz resultante da análise dos conflitos de cada componente curricular, especificados numericamente na primeira linha e primeira coluna da matriz, em relação a todos os demais. Pode-se perceber que se trata de uma matriz simétrica formada por zero e um, onde 0 (zero) indica que não há conflitos entre dois componentes curriculares, e 1 (um) assinala que existe pelo menos um aluno matriculado em comum entre os componentes. É possível observar também, que a diagonal principal é formada por zeros em virtude de representar a não existência de conflitos de um componente curricular em relação a ele mesmo. As informações expressas na matriz possibilitaram a modelagem do problema como um grafo, denominado grafo G , apresentado na Figura 4.

Figura 4 - Grafo G



Fonte: Autores

5.2 COLORAÇÃO DO GRAFO G

A coloração do grafo G foi realizada de forma manual a partir do algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado, representado na Figura 1. Cada cor atribuída aos vértices de G representa um período e os vértices coloridos com a mesma cor consistem nos exames que podem ser realizados no mesmo período.

Nesse sentido, para garantir a viabilidade do cronograma determinou-se que os componentes curriculares com alunos matriculados em comum não podem ser alocados para o mesmo período, assim como componentes ministrados por um mesmo professor precisam ser agendados em períodos distintos. Considerando que o cronograma deve ser distribuído em cinco dias, com dois períodos por dia, e deste estudo participaram 19 componentes curriculares, estabeleceu-se que pode haver no máximo dois exames por período. Outro aspecto considerado foi a prioridade em concentrar em um mesmo horário exames de componentes curriculares de mesma natureza, com a intenção de evitar que os alunos realizem no mesmo dia, dois exames de igual natureza. Estas duas últimas condições foram garantidas pelas adaptações realizadas no algoritmo de *Welsh-Powell*.

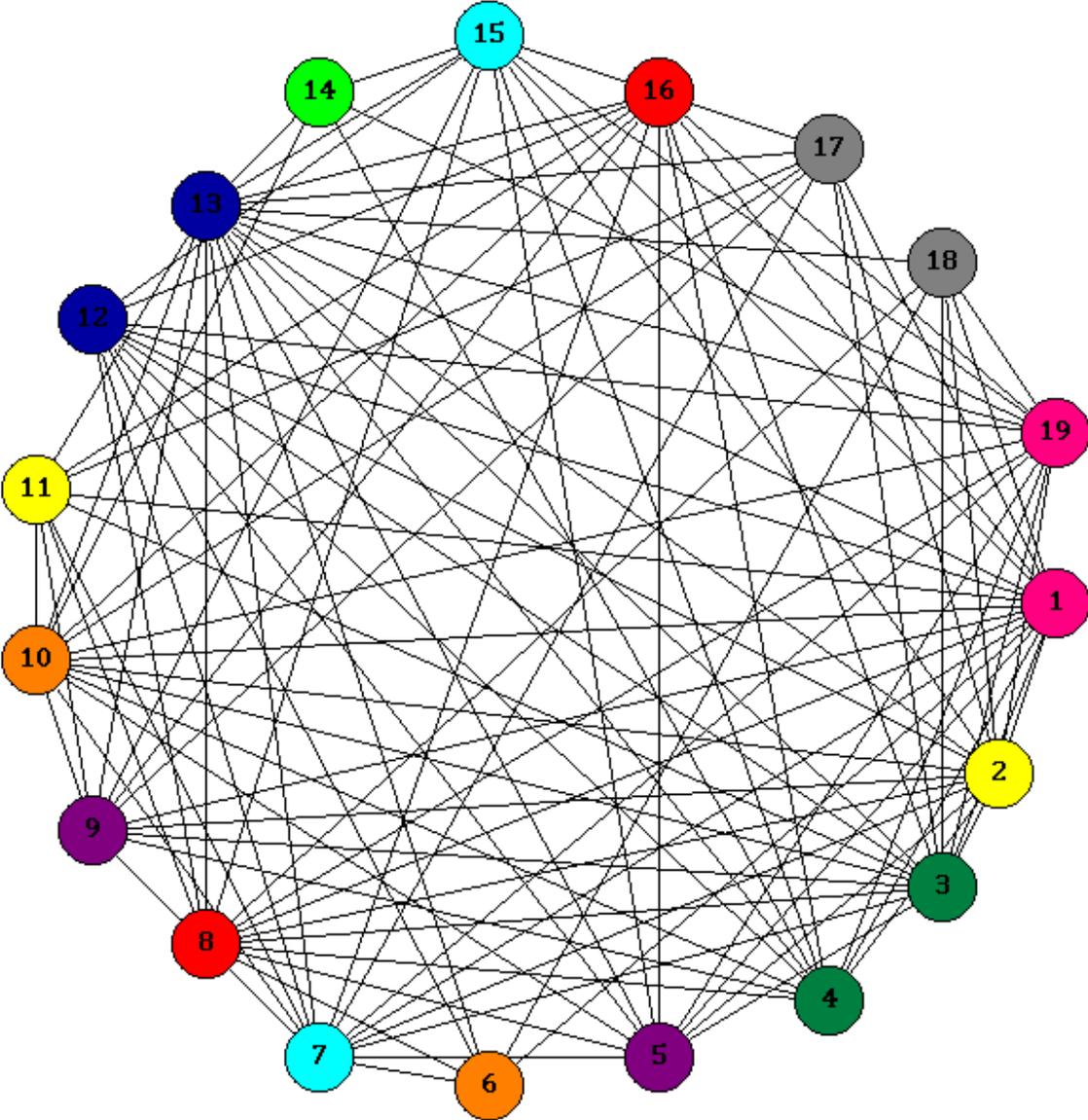
De acordo com os passos descritos no algoritmo, primeiramente os vértices do grafo G foram dispostos em ordem decrescente de grau. Logo após a primeira cor, azul, foi atribuída ao vértice de maior grau, v_{13} . Na sequência, foram analisados os vértices não adjacentes a algum vértice que antecedeu v_{13} e ao qual foi atribuída a cor azul, logo v_{12} recebeu a cor azul. No momento seguinte, a segunda cor, rosa, foi atribuída ao próximo vértice da lista de vértices decrescentes de grau, por conseguinte v_1 . E, então, foram identificados os vértices não adjacentes a algum vértice que antecedeu v_1 e ao qual foi atribuída a cor rosa, são eles: v_{14} e v_{19} . No entanto, como restrição, o problema determinou que pode haver no máximo dois exames por período, dessa forma somente um dos vértices não adjacentes a v_1 pode ser colorido com a referida cor. De acordo com o algoritmo, como o vértice v_{19} representa um componente de natureza igual a v_1 , foi priorizada a sua coloração em relação a v_{14} . Portanto, v_{19} recebeu a cor rosa. Caso houvesse dois ou mais vértices de mesma natureza a v_1 seria utilizado o critério de maior grau. Por outro lado, caso os vértices não adjacentes a v_1 que podem receber a cor rosa fossem de natureza distinta a v_1 seria também utilizado o critério de maior grau. O processo se repetiu de acordo com os parâmetros estabelecidos pelo algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado, representado na Figura 1, até que todos os vértices do grafo G foram coloridos.

Salienta-se que para atender a condição de evitar que alunos realizem dois exames de mesma natureza, no mesmo dia, os componentes curriculares foram classificados em dois grupos de acordo com sua natureza: Matemática Pura e Aplicada; e Educação e Ensino de

Matemática. Assim, na primeira classificação estão compreendidos os componentes representados pelos vértices: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{17}$ e v_{19} ; enquanto que a segunda contempla: $v_8, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}$ e v_{18} . Essa classificação será considerada para a ordenação dos exames no cronograma.

Com base nos passos especificados acima, a Figura 5 representa o resultado da coloração do grafo G desenvolvida de forma manual no *Software Grafos*.

Figura 5 - Coloração do grafo G



Fonte: Autores

A partir da coloração do grafo G foi possível identificar os componentes curriculares que podem ser alocados para o mesmo período considerando todas as restrições impostas ao

problema. Também se pôde constatar que o grafo G foi colorido com 10 cores, como as cores representam os períodos, a coloração permite que o cronograma seja desenvolvido em 10 períodos, que equivalem a 5 dias.

A ordenação dos exames no cronograma após a coloração foi realizada de acordo com alguns critérios estabelecidos que aprimoram o resultado. Para tanto, exames aplicados por um mesmo professor foram alocados prioritariamente para dias distintos e exames de natureza estritamente exata foram preferencialmente alocados para o primeiro período de cada dia. Essas condições determinam a preferência com que os componentes são alocados no cronograma de acordo com as intenções da instituição. Entretanto, caso não seja possível satisfazer a alguma dessas restrições, a viabilidade do cronograma não é comprometida.

Contudo, a partir dos critérios adotados para ordenação dos componentes foi possível obter o calendário de exames finais para o Curso de Matemática – Licenciatura, representado na Tabela 1.

Tabela 1 - Cronograma obtido para o calendário de exames

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Período 1	2 e 11	3 e 4	1 e 19	5 e 9	6 e 10
Período 2	17 e 18	7 e 15	12 e 13	8 e 16	14

Fonte: Autores

O cronograma apresenta a distribuição dos exames finais no intervalo de 5 dias, com dois períodos por dia, onde os 19 componentes curriculares considerados neste problema estão representados pelos números de 1 a 19.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados alcançados com esta proposta mostraram que os recursos e métodos utilizados conseguiram atender aos objetivos do problema. Todas as restrições impostas e as especificidades do contexto em questão foram atendidas pelo algoritmo de *Welsh-Powell* adaptado, alicerçado no conceito de Coloração de Grafos. Como o cronograma foi desenvolvido a partir de dados referentes a 19 componentes curriculares foi possível realizar a coloração do grafo G de forma manual.

De modo geral, a Teoria dos Grafos possibilitou a elaboração de um calendário de exames viável considerando uma série de fatores a fim de beneficiar alunos e professores como, por exemplo, restrição de horários tanto de alunos quanto de professores, número de exames por período, natureza dos componentes curriculares e até mesmo a maneira de alocar os componentes no cronograma de forma a proporcionar uma distribuição mais alternada de exames.

A elaboração do código em FORTRAN para o tratamento dos dados e obtenção da matriz de adjacência potencializou a elaboração do cronograma, uma vez que em um tempo computacional reduzido realizou-se a análise de 641 matrículas, distribuídas em 19 planilhas, gerando a matriz de adjacência que especifica os alunos matriculados em comum entre cada componente curricular.

Para trabalhos futuros almeja-se desenvolver um algoritmo computacional que realize também a coloração de grafos e, conseqüentemente, obtenha o cronograma de exames viabilizando a solução de problemas com um número maior de variáveis.

7 REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

BURKE, E. K. et al. A graph based hyper-heuristic for exam timetabling problems. **European Journal of Operational Research**, 176, 2007, p. 177-192.

BURKE, E.K., ELLIMAN, D.G. e WEARE, R. F. A hybrid genetic algorithm for highly constrained timetabling problems. **Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms (ICGA'95, Pittsburgh, USA, 15th-19th July 1995)**. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, USA, 1995, p. 605-610.

CARVALHO, R. **Abordagem Heurística para o Problema de Programação de Horários de Cursos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica. Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2011.

CÔTÉ, P., WONG, T. e SABOURIN, R. **Application of a hybrid multi-objective evolutionary algorithm to the uncapacitated exam proximity problem**. Lecture Notes in Computer Science. 2005, v. 3616, p. 151-168.

DAVID, P. A constraint-based approach for examination timetabling using local repair techniques. In: E.K. Burke and M.W. Carter (eds). **Practice and Theory of Automated Timetabling: Selected Papers from the 2nd International Conference**. Lecture Notes in Computer Science, 1998, v. 1408, p. 169-186.

DUONG, T. A.; LAM, K. H. Combining constraint programming and simulated annealing on university exam timetabling. In: **Proceedings of the 2nd International Conference in Computer Sciences, Research, Innovation & Vision for the Future (RIVF2004)**, Hanoi, Vietnam, February 2-5, 2004, p. 205-210.

GASPERO, L. DI; SCHAERF, A. **Tabu Search Techniques for Examination Timetabling**. Conferência Internacional sobre a Prática e Teoria do Ajuste Automatizado PATAT 2000: Prática e Teoria do Timetabling Automatizado III, 2000, v. 2079, p. 104-117.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Matemática Discreta**, coleção Schaum. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2004.

MACHADO, A. M.; BOERES, M. C. S. Uma proposta de formulação do problema de programação de tabela-horário de exames de Toronto via coloração de grafos e sua resolução pelo algoritmo de busca tabu. **XLI SBPO - Pesquisa Operacional na Gestão do Conhecimento**, 2009.

MUJUNI, E.; MUSHI, A. **Solving the Examination Timetabling Problem Using a Two-Phase Heuristic**: The case of Sokoine University of Agriculture. *Journal of Information and Computing Science*, 2015, v. 10, n. 3, p. 220-227. England, UK, 2015.

SCHAERF, A. A Survey of Automated Timetabling. **Artificial Intelligence Review**, 1999. p. 87-127. v. 13, n. 2.

SANTOS, H.G.; SOUZA, M.J.F. Programação de Horários em Instituições Educacionais: Formulações e Algoritmos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2007, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: XXXIX SBPO, 2007, p. 1126-1137.

WELSH, D. J. A.; POWELL, M. B. An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. **The Computer Journal**, v. 10, 1967, p. 85-86.

WERRA, D. An introduction to timetabling. **European Journal of Operational Research**, 1985, p. 151-162.

WOUMANS, G. et al. A column generation approach for solving the examination-timetabling problem. **European Journal of Operational Research** 253, 2016, p. 178-194.